9/5/17 Μάθημα 16.

Πρόταση: Κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα
απόδειξη:
$R=\{r_1,\dots,r_n\}$ Α-Π $\Rightarrow$ σώμα
Α-Π $\Rightarrow$ R αντιμεταθετικός μοναδιαίος
Αρκεί κάθε μη-μηδενικό στοιχείο να έχει αντίστροφο
$r\in R-\{0\}^{\oplus} \Rightarrow rR=\{rr_1, rr_2, \dots, rr_n\} \underset{??}{\subseteq} R$
Αν είχαμε $rr_i = rr_j \Rightarrow r(r_i - r_j)=0$
Επειδή R Α-Π $\Rightarrow$ r ή $r_i - r_j = 0$ και $r\neq 0$ $\oplus$
$r_i = r_j \Rightarrow rR = R \Rightarrow 1\in R = rR \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists i$ ώστε $1 = rr_i \Rightarrow$ r έχει αντίστροφο.

ΙΔΕΩΔΗ

$I\leq R$ υποδακτύλιος
$(R,+)$ αβελιανή ομάδα $\Rightarrow (I,+) \trianglelefteq (R,+)$
$\Rightarrow (R/I, +)$ ορίζεται η ομάδα πηλίκο. Είναι αυτό δακτύλιος;
Για να είναι δακτύλιος θα πρέπει να ορίζεται το γινόμενο: $(r+I)(r'+I) \underset{\text{περιμένω να έχω}}{=} rr'+I$

επιμεριστική

$rr' + rI + Ir' + I^2 = rr' + I$
θα πρέπει $rI, Ir' = I \ \forall r, r'\in R$

Ορισμός: Ένας υποδακτύλιος I του R θα καλείται ιδεώδες αν ισχύει ra και ar $\in$ I με $r\in R$ και $a\in I$. Ισοδύναμα $rI = I = Ir' \ \forall r,r'\in R$
Συμβολισμός $I \trianglelefteq R$.

π.χ. Το $\mathbb{Q}$ είναι δακτύλιος? είναι είναι και σώμα
Το $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ είναι δακτύλιος
Είναι ιδεώδες??
Όχι γιατί $\frac{1}{2}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ άρα $\mathbb{Z} \ntrianglelefteq \mathbb{Q}$

π.χ. $k\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

Αν $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow mk\mathbb{Z} = km\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z}$

π.χ. Το ίδιο ισχύει και για τα $k\mathbb{Z}_n \trianglelefteq \mathbb{Z}_n$

(αντιμεταθετικός, μοναδιαίος)

π.χ. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ δακτύλιος και τον υποδακτύλιο

$k\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$ και έχω: $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \geq k\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$

Είναι υποδακτύλιος, γιατί $(km, nl), (km', nl') \Rightarrow$

$\Rightarrow (km, nl) - (km', nl') = (k(m-m'), n(l-l')) \in k\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$

$(km, nl) \cdot (km', nl') = (k^2 mm', n^2 ll') \in k\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$

άρα είναι υποδακτύλιος.

Είναι ιδεώδες??

Για να είναι θα πάρω $(a,b)(km, nl)$ θέλουμε να ανήκει στο $k\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$

Έχει παρα πολλούς μηδενοδιαιρέτες $(\underset{\neq 0}{a}, 0)(0, \underset{\neq 0}{b})$

$(kam, nbl) \in k\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

αντιμετ. το $\mathbb{Z}$ άρα είναι.

και αυτό είναι ιδεώδες $\mathbb{Z} \oplus \{0\} \trianglelefteq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

είναι αν βάλουμε το $m=1$, $n=0$.

Ορισμός: Έστω I ιδεώδες του δακτυλίου R.

Τότε ορίζεται ο δακτύλιος πηλίκο $R/I =$

$= \{I + r \mid r \in R\} = \{r + I \mid r \in R\}$

με πράξεις $(r+I) + (r'+I) = r + r' + I$

και το γινόμενο: $(r+I) \cdot (r'+I) = rr' + I \quad \forall r, r' \in R$

Πρέπει να εξετάσω αν είναι καλά ορισμένο

Προσοχή! 1) $(R/I, +)$ αυτό έχει εξεταστεί στην θεωρία ομάδων γιατί $I \trianglelefteq R$

2) Πρέπει να δείξουμε ότι το γινόμενο δε

εξαρτάται από την αντιπαράσταση των συμπλόκων.

3) Μετά ότι ισχύει η προσεταιριστική κ επιμεριστική

θ.δ.το 2)

Έστω $r+I=a+I$ και $r'+I=a'+I$

θέλουμε $rr'+I=aa'+I \Leftrightarrow$

$rr'-aa' \in I$??

$r+I=a+I \Leftrightarrow r-a \in I$

$r'+I=a'+I \Leftrightarrow r'-a' \in I$

$$rr'-aa' = rr' \underbrace{-ra'+ra'}_{=0} -aa' = \underbrace{\underbrace{r(r'-a)}_{\in I \triangleleft R}}_{\in I} + \underbrace{\underbrace{(r-a)a'}_{\in I \triangleleft R}}_{\in I} \in I$$

θα δείξω το 3)

$$((r_1+I)\cdot(r_2+I))(r_3+I) \overset{???}{=} (r_1+I)((r_2+I)(r_3+I))$$

$$(r_1r_2+I)(r_3+I) = (r_1r_2)r_3+I \overset{\leftarrow R \text{ προσετ.}}{=}$$
$$= r_1(r_2r_3)+I = (r_1+I)((r_2+I)(r_3+I))$$

$$(r_1+I)((r_2+I)(r_3+I)) = (r_1+I)(r_2+I)+(r_1+I)(r_3+I)$$

$$(r_1+I)(r_2+r_3+I) = r_1(r_2+r_3)+I =$$
$$= r_1+r_2+I+r_1r_3+I = (r_1+I)(r_2+I)+(r_1+I)(r_3+I)$$

και αντίστοιχα: $((r_1+I)+(r_2+I))(r_3+I) =$
$(r_1+I)(r_3+I)+(r_2+I)(r_3+I)$

π.χ. Έστω R αντιμεταθετικός, μοναδιαίος και $a \in R$.
Ορίζουμε το $S = aR = \{ar \mid r \in R\}$
Αυτό συμβολίζεται ο υποδακτύλιος που γεννάται από το a: $S = \langle a \rangle$

$S \leq R$ Διότι: $\left.\begin{array}{l} ar - ar' = a(r - r') \in S \\ ar \cdot ar' = a^2 rr' \in S \end{array}\right\} \Rightarrow S \leq R$

και μάλιστα ιδεώδες $S \trianglelefteq R$

Έστω $r \in R$ και $as \in S \Rightarrow ras = ars = asr \in S \Rightarrow$
$\Rightarrow S \trianglelefteq R$

Προσοχή! Έστω R μοναδιαίος και $I \trianglelefteq R$ ώστε $1 \in I \Rightarrow I = R$
↳ τότε το I ταυτίζεται με ο R
γιατί $\forall r \in R \Rightarrow r \cdot 1 \in I \trianglelefteq R \Rightarrow r \in I \Rightarrow R \subseteq I$
$\Rightarrow R = I$

Αν το ιδεώδη περιέχει τον μοναδιαίο τότε περιέχει όλο τον δακτύλιο.

Ορισμός: Ένα ιδεώδες $I \trianglelefteq R$ θα καλείται κύριο, αν $\{0\} \neq I \neq R$.
Αν $I \trianglelefteq R \Rightarrow$ ορίζεται ο δακτύλιος πηλίκο R/I
Ερωτήσεις: 1) Πότε είναι αντιμεταθετικός
2) Πότε είναι μοναδιαίος
3) Πότε είναι Α-Π
4) Πότε είναι σώμα.

1) Αν ο R είναι αντιμεταθετικός και ο R/I είναι επίσης
$(r+I)(r'+I) = rr' + I = r'r + I = (r'+I)(r+I)$

2) Αν ο R είναι μοναδιαίος τότε είναι και το R/I
Ν.δ.ο $(1+I)$ μοναδιαίο:
$(r+I)(1+I) = r \cdot 1 + I = r + I = (1+I)(r+I)$

3) Υποθέτουμε ότι ο R είναι Α-Π.
Θέλουμε το πηλίκο R/I Α-Π $\Leftrightarrow$ ΔΕΝ πρέπει να έχω μηδενοδιαιρέτες: $(r+I),(r'+I) \neq I$:
$(r+I)(r'+I) \neq I$
Αν είχαμε $(r+I)(r'+I) = I \Leftrightarrow rr'+I = I \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow rr' \in I$
Τότε θέλουμε r ή $r' \in I$ (πρώτο)

Ορισμός: Ένα ιδεώδες για το οποίο ισχύει ότι αν $rr' \in I \Rightarrow r$ ή $r' \in I$ θα καλείται πρώτο ιδεώδες.
π.χ. $p\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$
Αν $m \cdot k \in p\mathbb{Z} \Leftrightarrow mk = pn$, p πρώτος $\Rightarrow$
$\Rightarrow p/m$ ή $k \Rightarrow m = pm'$ $\in p\mathbb{Z}$.
$k = pk'$

$\Rightarrow$ Αν το ιδεώδες είναι πρώτο δεν έχω μηδενοδιαιρέτες

Θεώρημα: Ο δακτύλιος πηλίκο R/I δεν έχει μηδενοδιαιρέτες αν το I είναι πρώτο.
απόδειξη:
Έστω $I \trianglelefteq R$ πρώτο ιδεώδες
Υποθέτουμε ότι το πηλίκο R/I έχει μηδενοδιαιρέτες άρα $(r+I)(r'+I) = I$ με
$r, r' \notin I$
$rr'+I = I \Leftrightarrow rr' \in I$ (αφού I πρώτο ιδεώδες)
Άρα r ή $r' \in I$ αδύνατο.
Άρα δεν έχει μηδενοδιαιρέτες

αντίστροφα: Έστω ότι R/I δεν έχει μηδενοδιαιρέτες
θ.δ.ο. I πρώτο.
Αν $rr' \in I$ και $r, r' \notin I$

$rr' + I = I \Leftrightarrow (r+I)(r'+I) = I$ και ο R/I δεν εχει μηδενοδιαιρετες $\Rightarrow r+I = I$ ή $r'+I = I$
$\Leftrightarrow r \in I$ ή $r' \in I$ αλλα υποθεσαμε $r, r' \notin I$
αρα ατοπο

Αρα $I \triangleleft R$ πρωτο ιδεωδες.

Πορισμα: Αν ο R είναι αντιμεταθετικός μοναδιαιος, τοτε I πρωτο ανν R/I Α-Π.

ερωτημα: Ποτε το πηλικο R/I γινεται σωμα;

Ορισμος: Εστω I ιδεωδες του R. Το I θα καλειται μεγιστο, αν δεν υπαρχει απο ιδεωδες να το περιεχει εκτος απο τον (δακτυλιο) R.
$I \subsetneq R$ μεγιστο (αν και μονο αν) $\Leftrightarrow \nexists J \triangleleft R$ με $I \subsetneq J \subsetneq R$